

MATEMÀTIQUES

DEURES

D'ESTIU

de 1r a 2n

DE BATXILLERAT

- Has de fer tots els exercicis en fulls blancs DIN-A4, escrits a una sola cara, que s'hauran de lliurar grapats juntament amb aquests fulls d'enunciats.
- A principi del curs següent hi haurà un examen de control inicial de nivell amb exercicis trets d'aquesta col·lecció.
- La nota de deures d'estiu s'obtindrà de la següent forma: Un 20% de la presentació del treball complet i un 80% de l'examen de control. Aquesta nota suposarà un 50% del primer parcial de matemàtiques de segon.
- **RECUPERACIÓ DE SETEMBRE:** Aquells alumnes amb les Matemàtiques pendents tindran un examen de recuperació amb exercicis idèntics als d'aquesta col·lecció (pot ésser amb dades diferents).

GEOMETRÍA ANALÍTICA 2D

- 1) Sigui $\vec{v}(3,5)$, $\vec{w}(-4,7)$ i $\vec{z}(2,17)$. Calcula:
 - a. $2\vec{v}-3\vec{w}$
 - b. el mòdul dels tres vectors
 - c. Busca k_1 i k_2 de manera que $\vec{z}=k_1\vec{v}+k_2\vec{w}$ (combinació lineal)
- 2) Escribe totes les equacions i fes el gràfic de la recta que passa pel punt $A(2,3)$ i té com a vector director $\vec{v}(-4,5)$.
- 3) Escribe totes les equacions i fes el gràfic de la recta que passa pels punts $A(-5,3)$ i $B(2,-4)$.
- 4) Calcula l'equació continua de la recta que passa pel punt $A(-2,7)$ i és paral·lela a la recta $y=2x-5$.
- 5) Escribe l'equació general explícita de la recta que passa pel punt $A(3,-4)$ i és perpendicular a la recta $3x+2y-3=0$.
- 6) Calcula l'angle, el punt de tall, la bisectriu i fes el gràfic de les rectes:

$$r: \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = -3 + 4t \end{cases} \quad s: \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$$
- 7) Donat el punt $A(2,2)$ i la recta $r:6x-5y+2=0$, calculeu:
 - a. La recta paral·lela a r que passa per A .
 - b. La recta normal a r que passi per A .
 - c. La projecció d' A sobre r .
 - d. La distància entre A i r .
- 8) Calcula la distància entre les rectes:

$$r: (x, y) = (2, 3) + k(3, 5) \quad s: \frac{x-3}{3} = \frac{y+2}{5}$$
- 9) Tenim tres vèrtex d'un triangle $A(2,-3)$, $B(3,2)$ i $C(-3,5)$. Calcula:
 - a. Els tres costats i el perímetre.
 - b. L'angle \hat{A}
 - c. L'àrea del triangle
 - d. El baricentre
 - e. L'ortocentre
 - f. El circumcentre
 - g. L'equació de la circumferència que conté els tres punts.
 - h. L'incentre.
 - i. L'equació de la circumferència tangent als tres costats.

LLOCS GEOMÈTRICS I CÒNIQUES

- 10) Calcula el lloc geomètric dels punts del pla que equidisten dels punts $A(2,2)$ i $B(-4,-4)$.
- 11) Calcula el lloc geomètric dels punts del pla que disten 3 del punt $C(2,3)$.
- 12) Calcula el lloc geomètric dels punts del pla que la suma de les distàncies als punts $A(2,0)$ i $B(-2,0)$ és 10.
- 13) Calcula el lloc geomètric dels punts del pla que la resta de les distàncies als punts $A(2,0)$ i $B(-2,0)$ és 5.
- 14) Calcula el lloc geomètric dels punts del pla que equidisten del punt $A(2,0)$ i la recta $x=5$.
- 15) Escribe l'equació i fes el gràfic de la circumferència de radi 5 i centre $C(2,2)$.
- 16) Calcula el centre i el radi i fes el gràfic de la circumferència: $x^2+y^2-4x+6y-3=0$.
- 17) Calcula la intersecció de la circumferència $(x-2)^2+(y+3)^2=25$ i la recta $y=-2x+1$.
- 18) Calcula la intersecció i l'eix radical de les circumferències:

$$C_1: (x+2)^2+(y-3)^2=9$$

$$C_2: (x+3)^2+(y-1)^2=1$$

COMPLEXOS:

- 19) Si $z_1=3-4i$ i $z_2=-4+3i$ calcula:
 - a) z_1+z_2
 - b) z_1-z_2
 - c) $z_1 \cdot z_2$
 - d) $\frac{z_1}{z_2}$
 - e) $z_1 - \frac{z_1}{z_2}$
 - f) $(z_1)^4$
 - g) $\sqrt[3]{z_2}$
- 20) Resol les equacions:
 - a. $z^2+9=0$
 - b. $z^2-3iz+2=0$
 - c. $z^3+27=0$
 - d. $z^4+2z+1=0$

21) Resol: $\frac{2}{z} - \frac{1}{z^*} = 3 - 2i$
 $z = x + iy \quad z^* = x - iy \quad |z| = 2$

TRIGONOMETRIA:

22) Si $\sin x = 0,3$ i x és del 2n quadrant, calcula:

- $\cos x =$
- $\tan x =$
- $\sin (x-180) =$
- $\cos (x-90) =$
- $\sec (x+180) =$

23) Si $\tan x = k$ i x és del 3r quadrant, calcula:

- $\sin x =$
- $\cos x =$
- $\tan (x-180) =$
- $\sec 2x =$
- $\operatorname{cosec} (90-x) =$

24) Demuestra:

- $\cos^2 x + (\cotg x \cdot \cos x)^2 = \cotg^2 x$
- $\operatorname{tag} x \cdot \sin x = \sec x \cdot \cos x$
- $\cotg x \cdot \sec x = \operatorname{cosec} x$

25) Resol:

- $2\sin(5x-30) = -1$
- $\cos(3x-20) = 0,3$
- $4\tan(4x-60) = 2$
- $\sin 2x = \cos x$
- $\sin^2(x-30) = \cos(x-30)$
- $\cos(x-45) = \sin(x-30)$
- $\arctan(x) - \arctan(x-1) = \pi/4$

26) Resol el triangle:

- $a=24$ m, $B=55^\circ$ i $C=69^\circ$
- $a=25$ m, $b=42$ m i $c=34$ m.
- $b=8$ dm, $A=15^\circ$ i $B=30^\circ$

GEOMETRIA:

27) Calcula l'angle que formen les diagonals d'un paral·lelogram de 40 cm i 20 cm de costats i 30° entre ells.

28) Calcula l'àrea d'un pentàgon inscrit en una circumferència de 3 m de radi.

29) Calcula l'àrea d'un sector circular de 2 m de radi i 210° .

30) Calcula el volum i l'àrea lateral d'una piràmide de base hexagonal, de 4 cm d'aresta de la base i 7 cm d'altura.

31) Calcula el volum d'un cilindre de 2 m de radi de la base, inscrit en una circumferència de 3 m de radi.

LÍMITS:

32) Calcula els límits:

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x-2}{\sqrt{5x^2+4}}$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-2}{4x+4}$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3-4x}{5x^6}$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2-2}{x+4}$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{2x-3} - \sqrt{3x})$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2}{x+4} - \frac{2x^2}{x-4} \right)$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2}{x^2+4} \right)^{x-3}$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2-1} \sqrt{\frac{2x^2-3}{4x}}$
- $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{4-x^2}{x+2}$
- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-4}{x^2-4}$
- $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2}$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2}{2x-1} \right)^{\frac{1}{x-1}}$

33) Calcula les asímptotes de les funcions:

- $f(x) = \frac{x}{x-1}$
- $f(x) = \frac{2x}{x^2-1}$
- $f(x) = \frac{3x^2}{x-4}$
- $f(x) = x \cdot e^x$
- $f(x) = \frac{e^x}{x-1}$
- $f(x) = \ln(x-1)$
- $f(x) = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2}$

DERIVADES:

34) Calcula la derivada, aplicant la definició:

a. $f(x) = 2x^2 - 3$

b. $f(x) = \frac{2}{x-3}$

$f(x) = x^3 - 8$

35) Calcula $f'(3)$ de la funció $3x^2$ aplicant la definició de derivada.

36) Calcula la recta tangent i normal de la funció $f(x) = \sqrt{2x-3}$ en el punt d'abscisses $x=2$.

37) Calcula les rectes tangent i normal a la corba $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 25$ en el punt d'abscissa $x=-1$.

38) Calcula els punts on la funció $f(x)=x^3-4x$ és paral·lela a la recta $y=2x-3$.

39) Calcula el punt on la funció $f(x) = \sqrt{x}$ és perpendicular a la recta $4x-2y=3$

40) Calcula les derivades:

a. $y = \frac{\log(3x-1)}{\sqrt{x^2-4}}$

b. $y = \cos^3(\ln(3x-4)^5)$

c. $y = (\arctan(3x-1))^{\sin(2x)}$

d. $4x^3y^2 - 2xy - 3 = 5x^2$

e. $y = \frac{3}{2 - \frac{5}{e^{4x}}}$

f. $y = \frac{x \cdot e^{-x}}{\sec(3x)}$

g. $y = \operatorname{tag}^4 \left(\cos \operatorname{ec}^3 \left(\frac{3}{\sqrt{2x-1}} \right) \right)$

h. $y = \sqrt[5]{\frac{\sin(3x)}{4^{-3x}}}$

i. $y = \log_7 \left(\frac{9x}{x^2-3} \right)^3$

j. $f(x) = \arcsin^4 \left(\sqrt[3]{\frac{3x-2}{5}} \right)$

ESTUDI DE FUNCIONS:

41) Calcula el domini, les funcions inverses i el recorregut de les funcions:

a. $y = \frac{3x}{x-1}$

b. $y = \ln(x^2 - 4)$

c. $y = \sqrt{\frac{x}{x-3}}$

42) Donades les funcions: $f(x) = \frac{2x-3}{x^2}$ i

$g(x) = \sqrt{3x^2 - 2x}$ calcula les composicions:

a. $(f \circ g)(x) = f(g(x))$

b. $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

c. $(f \circ f)(x) = f(f(x))$

43) Calcula els punts de tall amb els eixos:

a. $y = x^2 - 16$

b. $y = x^4 - 5x^2 + 4$

c. $y = \frac{x-2}{x^3-8}$

d. $y = (x-2) \cdot e^{x+3}$

e. $y = \sqrt{x+4}$

f. $y = \ln(x+1)$

44) Calcula els intervals de creixement, decreixement, els punts màxims i mínims relatius, els intervals de concavitat i convexitat i els punts d'inflexió de les funcions:

a. $y = x^3 - 27x$

b. $y = x^4 - 5x^2 + 4$

c. $y = \frac{3x}{x-1}$

d. $y = (x-2) \cdot e^{x+3}$

45) Fes l'estudi (domini, asímptotes, talls eixos, màxims, mínims i punts d'inflexió) i el gràfic complet de les funcions:

a. $y = x^3 - 9x$

b. $y = \frac{3x^2}{x-1}$

c. $y = 2x \cdot e^{-3x}$

d. $y = x \cdot \sqrt{300 - x^2}$

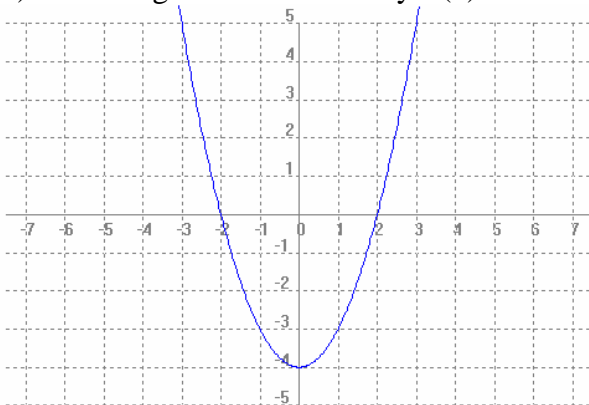
46) Fes el gràfic ràpid de les funcions:

- a. $y = x$
- b. $y = x^2$
- c. $y = \frac{1}{x}$
- d. $y = \sqrt{x}$
- e. $y = e^x$
- f. $y = 10^x$
- g. $y = \ln x$
- h. $y = \log x$
- i. $y = \sin x$
- j. $y = \cos x$
- k. $(x-2)^2 + (x+3)^2 = 1$

47) Fes les transformacions ràpides:

- a. $y = x^2 - 4$
- b. $y = \frac{-2}{x^2 - 1}$
- c. $y = \ln(x - 3)$
- d. $y = \sin(2x)$
- e. $y = |x^2 - 16|$

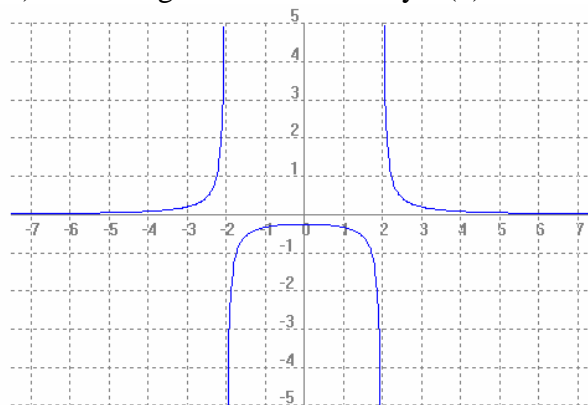
48) Donat el gràfic de la funció $y=f(x)$:



Dibuixa les funcions:

- a. $y = f(x - 3)$
- b. $y = f(x) + 2$
- c. $y = 2f(x)$
- d. $y = \frac{1}{f(x)}$
- e. $y = |f(x)|$
- f. $y = f'(x)$
- g. $y = \int f(x)dx$

49) Donat el gràfic de la funció $y=f(x)$:



fes les transformacions:

- a. $y = f(x - 3)$
- b. $y = f(x) + 2$
- c. $y = 2f(x)$
- d. $y = \frac{1}{f(x)}$

- e. $y = |f(x)|$
- f. $y = f'(x)$

50) Calcula les integrals:

- a. $\int (5x^3 - 3x^2 + x - 4)dx$
- b. $\int x\sqrt{3x^2 - 1} dx$
- c. $\int \frac{2x}{\sqrt[3]{x^2 + 3}} dx$
- d. $\int \frac{x}{x^2 - 4} dx$
- e. $\int \frac{3}{x^2 + 4} dx$
- f. $\int_0^3 \sqrt{x+1} dx$

51) Calcula l'àrea limitada per la funció $f(x)=x^2-9$, l'eix d'abscisses entre $x=-4$ i $x=5$.

52) Calcula l'àrea limitada per les funcions

$$f(x) = \sqrt{x} \text{ i } g(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}.$$

53) Calcula l'àrea limitada per la funció

$y = 4 - x^2$, la seva recta tangent en $x=1$ i l'eix d'abscisses.

54) Calcula el volum de revolució generat al fer girar 360° al voltant de l'eix d'abscisses la funció $f(x) = x^3 - 4x$, entre $x=1$ i $x=3$.

EXAMEN D'AUTOAVALUACIÓ:

L'objectiu d'aquest examen d'autoavaluació és que puguis comprovar, després d'haver fet els deures d'estiu, el teu grau de preparació. Ja saps que l'examen que farem la primera setmana de curs serà d'exercicis trets d'aquesta col·lecció, i per això, el d'aquest examen d'autoavaluació també ho són.

Les condicions amb la que has de fer aquest simulacre han de ser les més semblants a un examen:

- 1) estudia abans de fer-lo
- 2) fas l'examen durant dues hores (com a màxim), sense mirar els apunts
- 3) el corregeixes i t'hi poses la nota, comparant els resultats amb el full de respostes del sobre, que no pots obrir fins que acabis.

Aquest examen d'autoavaluació s'ha de presentar, junt amb el treball d'estiu, el primer dia de classe.

1) Calcula l'equació continua de la recta que passa pel punt A(-2,7) i és paral·lela a la recta $y=2x-5$.

2) Calcula el centre i el radi i fes el gràfic de la circumferència: $x^2+y^2-4x+6y-3=0$.

3) Calcula: $(3-4i)^4$

4) Resol: $\sin 2x = \cos x$

5) Resol el triangle: $a=24$ m, $B=55^\circ$ i $C=69^\circ$

6) Calcula l'àrea d'un pentàgon inscrit en una circumferència de 3 m de radi.

7) Calcula: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2}{x^2+4} \right)^{x-3}$

8) Calcula la derivada, aplicant la definició:
 $f(x) = 2x^2 - 3$.

9) Calcula la recta tangent i normal de la funció $f(x) = \sqrt{2x-3}$ en el punt d'abscisses $x=2$.

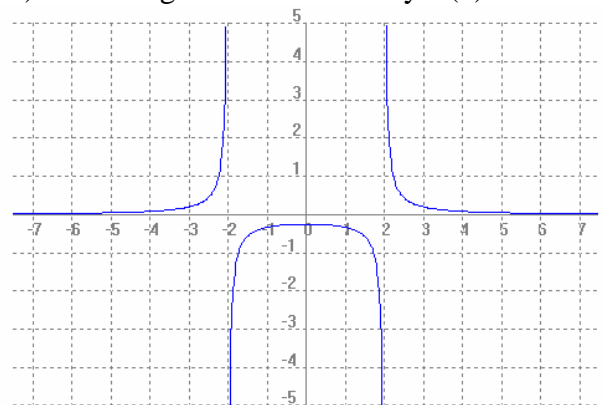
10) Deriva: $y = \operatorname{tag}^4 \left(\cos \operatorname{ec}^3 \left(\frac{3}{\sqrt{2x-1}} \right) \right)$

11) Donades les funcions: $f(x) = \frac{2x-3}{x^2}$ i

$g(x) = \sqrt{3x^2-2x}$ calcula la composició $(f \circ g)(x) =$.

12) Fes l'estudi (domini, asímptotes, talls eixos, màxims, mínims i punts d'inflexió) i el gràfic complet de la funció: $y = 2x \cdot e^{-3x}$

13) Donat el gràfic de la funció $y=f(x)$:



fes les transformacions:

a. $y = \frac{1}{f(x)}$

b. $y = |f(x)|$

14) Calcula les integrals:

a. $\int x\sqrt{3x^2-1} dx$

b. $\int_0^3 \sqrt{x+1} dx$

15) Calcula l'àrea limitada per la funció $f(x)=x^2-9$, l'eix d'abscisses entre $x=-4$ i $x=5$.

RESOLUCIÓ DE L'EXAMEN D'AUTOAVALUACIÓ:

1) **Calcula l'equació continua de la recta que passa pel punt A(-2,7) i és paral·lela a la recta $y=2x-5$.**

$$A(-2,7)$$

$$2x - y - 5 = 0 \rightarrow \vec{v}(1,2) \rightarrow \frac{x+2}{1} = \frac{y-7}{2}$$

2) **Calcula el centre i el radi i fes el gràfic de la circumferència: $x^2+y^2-4x+6y-3=0$.**

$$\left. \begin{aligned} x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0 \\ x^2 + y^2 - 2x_0x + 2y_0y + x_0^2 + y_0^2 - R^2 = 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{cases} -2x_0 = -4 \rightarrow x_0 = 2 \\ -2y_0 = 6 \rightarrow y_0 = -3 \\ x_0^2 + y_0^2 - R^2 = -3 \rightarrow (2)^2 + (-3)^2 - R^2 = -3 \rightarrow R = 4 \end{cases}$$

3) **Calcula:**

$$\begin{aligned} (3-4i)^4 &= \binom{4}{0}(3)^4(-4i)^0 + \binom{4}{1}(3)^3(-4i)^1 + \binom{4}{2}(3)^2(-4i)^2 + \binom{4}{3}(3)^1(-4i)^3 + \binom{4}{4}(3)^0(-4i)^4 = \\ &= 1.81.1 + 4.27.(-4i) + 6.9.16i^2 + 4.3.(-48)i^3 + 1.1.256.i^4 = \\ &= 81 - 432i - 864 + 576i + 256 = \\ &= -527 + 336i \end{aligned}$$

4) **Resol: $\sin 2x = \cos x$**

$$\begin{aligned} 2 \sin x \cos x = \cos x &\rightarrow 2 \sin x \cos x - \cos x = 0 \rightarrow \cos x(2 \sin x - 1) = 0 \\ \cos x = 0 &\rightarrow x = \arccos 0 = 0 + 360k \end{aligned}$$

$$2 \sin x - 1 = 0 \rightarrow \sin x = 1/2 \rightarrow x = \arcsin(1/2) = \begin{cases} 30 + 360k \\ 180 - 30 = 150 + 360k \end{cases}$$

5) **Resol el triangle: $a=24$ m, $B=55^\circ$ i $C=69^\circ$**

$$A = 180 - 55 - 69 = 56^\circ$$

$$\begin{aligned} \text{teorema del sin us: } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} &\rightarrow \frac{24}{\sin 56} = \frac{b}{\sin 55} \rightarrow b = 23,7 \text{ cm} \\ \frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} &\rightarrow \frac{24}{\sin 56} = \frac{c}{\sin 69} \rightarrow c = 27 \text{ cm} \end{aligned}$$

6) **Calcula l'àrea d'un pentàgon inscrit en una circumferència de 3 m de radi.**

$$\text{pentagon: } 5 \text{ costats} \rightarrow \frac{360}{5} = 72^\circ \rightarrow \frac{72}{2} = 36^\circ \rightarrow \begin{cases} h = 3 \cos 36 = 2,4 \text{ m} \\ \frac{b}{2} = 3 \sin 36 \rightarrow b = 3,5 \text{ m} \end{cases}$$

$$A_{\text{triangle}} = \frac{b h}{2} = \frac{3,5 \times 2,4}{2} = 4,2 \text{ m}^2$$

$$A_{\text{pentagon}} = 5 \cdot A_{\text{triangle}} = 5 \times 4,2 = 21 \text{ m}^2$$

7)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2}{x^2 + 4} \right)^{x-3} &= (1)^\infty \rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2}{x^2 + 4} \right)^{x-3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{x^2}{x^2 + 4} - 1 \right)^{x-3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{x^2 - x^2 - 4}{x^2 + 4} \right)^{x-3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{-4}{x^2 + 4} \right)^{x-3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x^2 + 4}{-4}} \right)^{\frac{-4}{x^2 + 4} (x-3)} = e^{\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x + 12}{x^2 + 4}} = e^0 = 1 \end{aligned}$$

8) **Calcula la derivada, aplicant la definició:** $f(x) = 2x^2 - 3$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2x^2 + 4xh + 2h^2 - 3 - (2x^2 - 3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4xh + 2h^2}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(4x + 2h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (4x + 2h) = 4x \\ f(x) &= 2x^2 - 3 \\ f(x+h) &= 2(x+h)^2 - 3 = 2(x^2 + 2xh + h^2) - 3 = 2x^2 + 4xh + 2h^2 - 3 \end{aligned}$$

9) **Calcula la recta tangent i normal de la funció** $f(x) = +\sqrt{2x-3}$ **en el punt d'abscisses** $x=2$.

RT : $y - f(a) = f'(a)(x - a)$

$y - f(2) = f'(2)(x - 2)$

$f(x) = \sqrt{2x-3} \rightarrow f(2) = \sqrt{2 \cdot 2 - 3} = 1$

$f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x-3}} \rightarrow f'(2) = \frac{2}{2\sqrt{2 \cdot 2 - 3}} = 1$

$\rightarrow y - 1 = 1(x - 2) \rightarrow y = x - 1$

RN : $y - f(a) = \frac{-1}{f'(a)}(x - a)$

$y - f(2) = \frac{-1}{f'(2)}(x - 2)$

$y - 1 = \frac{-1}{1}(x - 2)$

$y = -x + 3$

10) **Deriva:** $y = \operatorname{tag}^4 \left(\operatorname{cosec}^3 \left(\frac{3}{\sqrt{2x-1}} \right) \right)$

$y' = 4 \operatorname{tag}^3 \left(\operatorname{cosec}^3 \left(\frac{3}{\sqrt{2x-1}} \right) \right) \operatorname{sec}^2 \left(\operatorname{cosec}^3 \left(\frac{3}{\sqrt{2x-1}} \right) \right) 3 \operatorname{cosec}^2 \left(\frac{3}{\sqrt{2x-1}} \right) \left(-\operatorname{cosec} \left(\frac{3}{\sqrt{2x-1}} \right) \right) \left(\operatorname{cotg} \left(\frac{3}{\sqrt{2x-1}} \right) \right) \frac{-3}{(\sqrt{2x-1})^2} \cdot 2$

i

11) **Donades les funcions:** $f(x) = \frac{2x-3}{x^2}$ **i** $g(x) = \sqrt{3x^2 - 2x}$ **calcula la composició** $(f \circ g)(x)$.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{2\sqrt{3x^2 - 2x} - 3}{(\sqrt{3x^2 - 2x})^2} = \frac{2\sqrt{3x^2 - 2x} - 3}{3x^2 - 2x}$$

12) Fes l'estudi (domini, asímptotes, talls eixos, màxims, mínims i punts d'inflexió) i el gràfic complet de la funció: $y = 2x.e^{-3x}$

DOMINI: tots el reals

ASÍMPTOTES: A.V.: no en té

A.H.:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x.e^{-3x} = 2(-\infty).e^{-3(-\infty)} = -\infty.\infty = -\infty \rightarrow \text{no és A.H.} \rightarrow \text{A.O.?}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 2x.e^{-3x} = 2(\infty).e^{-3(\infty)} = \infty.0 = 0 \rightarrow \text{A.H. en } y = 0 \rightarrow \text{no té A.O.}$$

A.O.:

$$y = mx + n$$

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x.e^{-3x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2.e^{-3x} = \infty \rightarrow \text{no és A.O.}$$

TALLS EIXOS:

Eix de les "x" (abscisses): $y = 0 \rightarrow 2x.e^{-3x} \rightarrow \begin{cases} 2x = 0 \rightarrow x = 0 \\ e^{-3x} = 0 \rightarrow \text{no té solució} \end{cases}$

Eix de les "y" (ordenades): $x = 0 \rightarrow f(x) = 2(0).e^{-3(0)} = 0$

MÀXIMS I MÍNIMS:

$$y' = 2.e^{-3x} + 2x.e^{-3x} \cdot (-3) = e^{-3x}(2 - 6x) = 0 \rightarrow \begin{cases} 2 - 6x = 0 \rightarrow x = \frac{1}{3} \\ e^{-3x} = 0 \rightarrow \text{no té solució} \end{cases}$$

+ (creix)	$\frac{1}{3}$	- (decreix)
0		1
f(0)		f(1)

és un màxim : $x = \frac{1}{3}$ $y = f\left(\frac{1}{3}\right) = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) \cdot e^{-3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)} = 0,2$

PUNTS D'INFLEXIÓ:

$$y' = e^{-3x} \cdot (-3) \cdot (2 - 6x) + e^{-3x} \cdot (-6) = e^{-3x}(18x - 12) = 0 \rightarrow$$

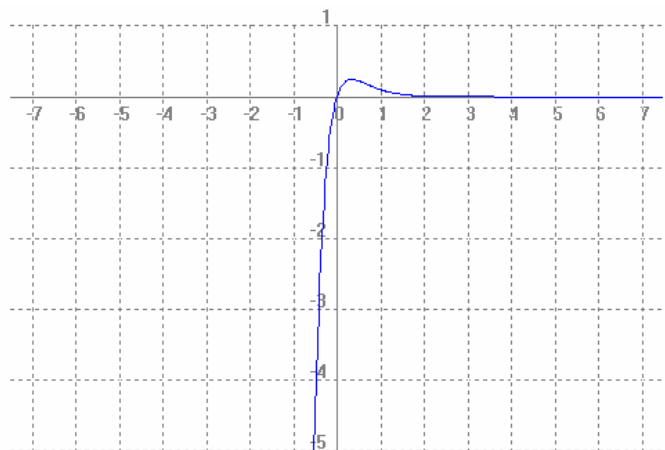
$$\rightarrow \begin{cases} 18x - 12 = 0 \rightarrow x = \frac{2}{3} \\ e^{-3x} = 0 \rightarrow \text{no té solució} \end{cases}$$

- (convex)	$\frac{2}{3}$	+ (concau)
0		1
f'(0)		f'(1)

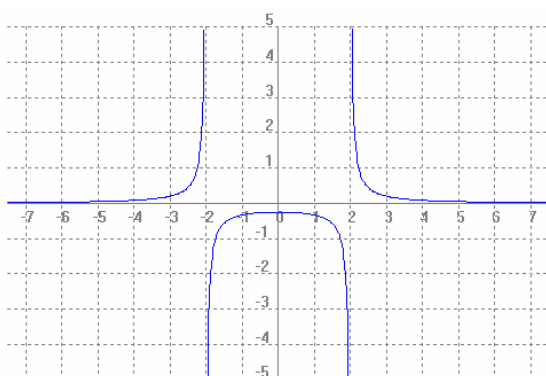
és un punt d'inflexió: $x = \frac{2}{3}$

$$y = f\left(\frac{2}{3}\right) = 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \cdot e^{-3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)} = 0,18$$

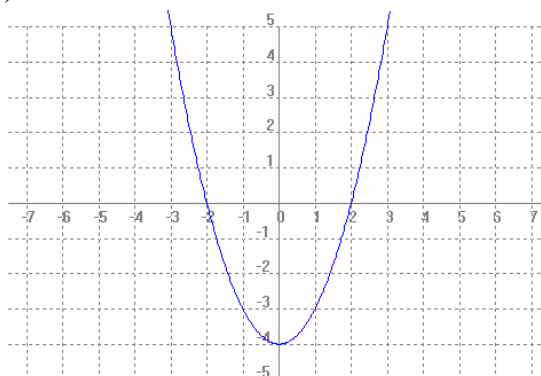
GRÀFIC:



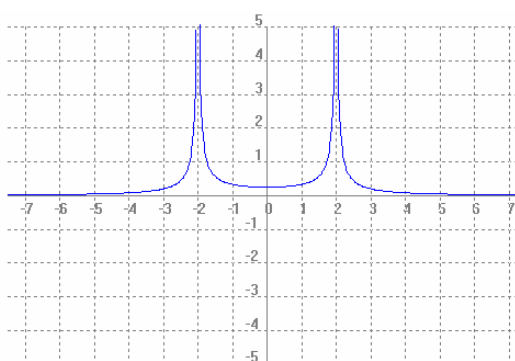
13) Donat el gràfic de la funció $y=f(x)$: fes les transformacions:



a) $y = \frac{1}{f(x)}$



b) $y = |f(x)|$



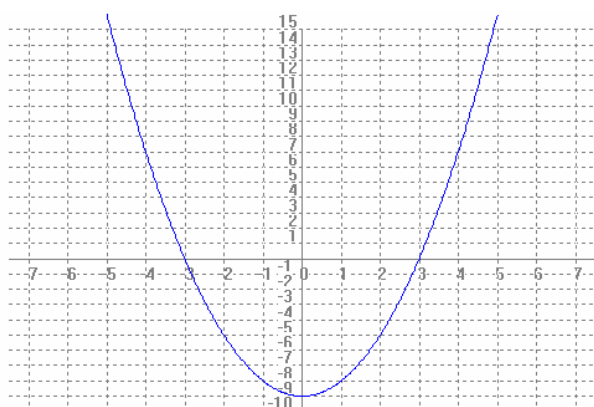
14) Calcula les integrals:

$$a) \int x\sqrt{3x^2 - 1} dx = \frac{1}{6} \int 6x(3x^2 - 1)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{(3x^2 - 1)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{(3x^2 - 1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \sqrt{(3x^2 - 1)^3} + c$$

$$b) \int_0^3 \sqrt{x+1} dx = \int_0^3 (x+1)^{\frac{1}{2}} dx = \left[\frac{(x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^3 = \left[\frac{2}{3} \sqrt{(x+1)^3} \right]_0^3 = \frac{2}{3} \sqrt{(3+1)^3} - \frac{2}{3} \sqrt{(0+1)^3} =$$

$$= \frac{16}{3} - \frac{2}{3} = \frac{14}{3}$$

15) Calcula l'àrea limitada per la funció $f(x)=x^2-9$, l'eix d'abscisses entre $x=-4$ i $x=5$.



$$A = \int_{-4}^{-3} (x^2 - 9) dx + \int_{-3}^3 (-x^2 + 9) dx + \int_3^5 (x^2 - 9) dx =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - 9x \right]_{-4}^{-3} + \left[-\frac{x^3}{3} + 9x \right]_{-3}^3 + \left[\frac{x^3}{3} - 9x \right]_3^5 =$$

$$= \left[18 - \left(\frac{44}{3}\right) \right] + [18 - (-18)] + \left[-\frac{10}{3} - (-18) \right] = 54 \text{ u}^2$$